

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA
Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1987/88

EUM 101 Matematik I

Tarikh: 26 Oktober 1987

Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengahari
(3 Jam)

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 11 muka surat yang bercetak dan ENAM (6) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab LIMA (5) soalan. Semua soalan mesti dijawab di dalam Bahasa Malaysia. Setiap soalan dinilai atas 100 markah dan markah yang diperuntukkan bagi tiap-tiap ceraiian soalan ditunjukkan di dalam kurungan (...).

Buku sifir matematik disediakan. Mesin hitung boleh digunakan dalam komputasi. Semua kerja mengira mesti ditunjukkan dengan jelas.

...2/-

1. (a) Di dalam suatu sistem kejuruteraan, fungsi output adalah seperti berikut:-

$$f(t) = \frac{t(1+t)^{1/t}}{3t+t^2}$$

iaitu t adalah masa di dalam saat. Cari nilai permulaan bagi fungsi output dengan menilaikan had $f(t)$.
 $t \rightarrow 0$

(25%)

- (b) Bilangan suatu peranti elektronik baru yang dijangka dapat dijual pada tahun ke $-x$ berdasarkan fungsi berikut:-

$$f(x) = \frac{10000}{1 + 100e^{-x}}$$

iaitu x diukur di dalam tahun.

- (i) Cari domain bagi $f(x)$.

(5%)

- (ii) Cari bilangan peranti elektronik itu yang dijangka akan dijual apabila pengeluaran bermula.

(5%)

- (iii) Cari suatu batas atas bagi anggaran penjualan peranti elektronik itu.

(5%)

- (iv) Lakarkan graf bagi fungsi $f(x)$ dan tentukan nilai x apabila kadar penjualan maksimum tercapai.

(30%)

...3/-

- (c) Kadar pengeluaran bagi suatu mesin adalah dinyatakan oleh fungsi langkah berikut:-

$$P(t) = \begin{cases} 8t & \text{jika } 40 \leq t \leq 80 \\ 11.20t - 0.04t^2 & \text{jika } 80 < t \leq 280 \end{cases}$$

iaitu $P(t)$ adalah di dalam unit per minit dan t ialah jangka masa, di dalam minit, mesin itu dijalankan. Dengan menggunakan Teorem Nilai Ekstremum, tentukan sama ada kadar pengeluaran yang maksimum (mutlak) bagi mesin itu wujud atau tidak. Jika wujud, cari $P'(t)$, semua titik genting serta nilai ekstremum tempatan bagi $P(t)$. Kemudian nyatakan kadar pengeluaran maksimum (mutlak) bagi mesin itu.

(30%)

2. (a) (i) Fungsi konvolusi yang merupakan suatu fungsi penting di dalam kejuruteraan ditakrifkan seperti berikut:-

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt$$

dengan anggapan bahawa kamiran tak wajar itu menumpu. Tunjukkan bahawa $f * g = g * f$.

(10%)

...4/-

(ii) Kamiran berikut: -

$$I = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\sin x)^{\frac{1}{2}} dx$$

adalah rumit untuk dinilai dengan tepat. Cari suatu selang $[a, b]$ yang terbaik sekali untuk menganggarkan batas-batas pada mana nilai I terletak.

(20%)

(b) Bagi suatu fungsi input $g(t)$ selang dan $a > 0$, buktikan bahawa

$$\int_{-a}^a g(t) \cos t dt = \begin{cases} 0 & \text{jika } g(t) \text{ ganjil} \\ 2 \int_0^a g(t) \cos t dt & \text{jika } g(t) \text{ genap} \end{cases}$$

(20%)

(c) Suatu fungsi $f(t)$ dipanggil fungsi ketumpatan pada selang $[a, b]$ jika ia memenuhi dua syarat berikut:-

$$(*) \int_a^b f(t) dt = 1 ,$$

$$(**) f(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b] .$$

Katakan di dalam suatu sistem, fungsi input ialah

$$f(t) = \frac{1}{N} \left(\frac{t}{1-t} \right)^{\frac{1}{2}} , \quad t \geq 0$$

iaitu N ialah suatu faktor penormal.

Cari nilai N supaya fungsi input $f(t)$ merupakan suatu fungsi ketumpatan pada selang $[0, \frac{1}{2}]$.

(50%)

3. (a) Nilaiikan penentu berikut:-

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(15%)

(b) Di dalam pemodelan suatu sistem, persamaan-persamaan linear berikut dibentuk:

$$2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$-x_1 + x_3 - x_4 = -1$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3$$

Dengan menggunakan kaedah penghapusan Gauss, tentukan sama ada sistem ini konsisten atau tidak. Jika sistem ini konsisten, cari vektor penyelesaiannya.

(25%)

...6/-

- (c) Katakan $A = [a_{ik}]_{n \times n}$ iaitu a_{ik} adalah nombor-nombor kompleks.

Konjugat bagi matriks A ditakrifkan seperti berikut:

$$\bar{A} = [\bar{a}_{ik}]_{n \times n}, \quad \bar{a}_{ik} \text{ adalah konjugat bagi } a_{ik}.$$

A dikatakan Hermitean jika $A^T = \bar{A}$, iaitu A^T adalah matriks transposisi bagi A . Matriks Hermitean adalah penting di dalam kejuruteraan.

Sebaliknya, A dikatakan Hermitean pencong jika $A^T = -\bar{A}$.

- (i) Tunjukkan sama ada matriks-matriks berikut Hermitean atau Hermitean pencong:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1-j & 2 \\ 1+j & 3 & j \\ 2 & -j & 0 \end{bmatrix}, \quad j = \sqrt{-1}$$

$$N = \begin{bmatrix} j & 1-j & 2 \\ -1-j & 3j & j \\ -2 & j & 0 \end{bmatrix}$$

(20%)

...7/-

- (ii) Jika $A = [a_{ik}]_{n \times n}$, tunjukkan bahawa $A + \overline{A}^T$ adalah Hermitean dan $A - \overline{A}^T$ adalah Hermitean pencong.

(20%)

- (iii) $[h_{11}] = \overline{x}^T A x$ dipanggil bentuk Hermitean jika

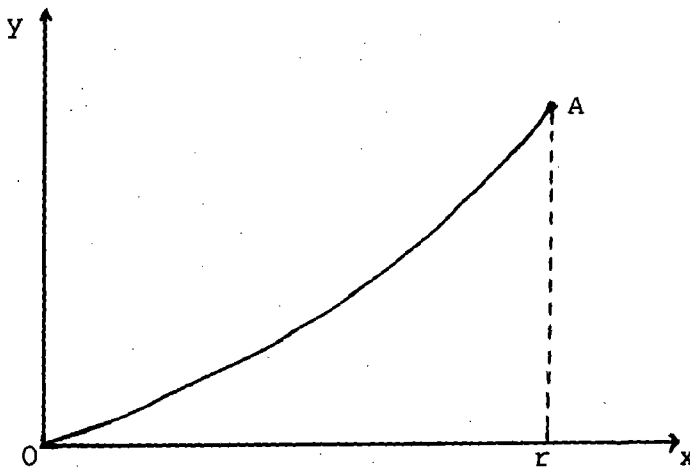
$A = [a_{ik}]_{n \times n}$ adalah matriks Hermitean dan

$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n]$ adalah suatu vektor.

Tunjukkan bahawa h_{11} adalah suatu nombor nyata.

(20%)

4. (a) Seutas kabel digantung dari satu titik A ke titik asalan, seperti di dalam rajah di bawah. Ia mempunyai beban



...8/-

teragih seragam iaitu p kg/m. Katalah q adalah daya tegangan di 0. Didapati bahawa bentuk kabel ini boleh diperihalkan oleh fungsi.

$$f(x) = \frac{px^2}{2q} \quad 0 \leq x \leq r$$

supaya A adalah titik $(r, pr^2/2q)$.

(i) Tunjukkan bahawa panjang kabel, L , adalah

$$L = \int_0^r [1 + (f(x))^2]^{1/2} dx$$

[Petunjuk: Teorem Pythagoras]

(20%)

(ii) Tunjukkan bahawa persamaan di dalam (i) dapat ditulis

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{p}{q}\right)^{2n} r^{2n+1}$$

(30%)

(iii) Tentukan jejari penumpuan bagi siri di dalam (ii).

(20%)

...9/-

- (b) Apabila habis memeriksa skrip-skrip peperiksaan nanti, saya akan pergi bercuti. Saya akan bercuti selama x hari di Britain, y hari di Ketherah (kampung saya) dan z hari di Australia. Saya dapati fungsi 'keseronokan' bercuti saya adalah

$$f(x, y, z) = 2x + y + 2z$$

Faktor-faktor seperti perancangan dan kewangan menetapkan bahawa

$$x^2 + y^2 + z^2 = 225$$

Apakah nilai-nilai bagi x , y dan z yang akan memaksimumkan 'keseronokan' saya bercuti?

(30%)

5. Analisis Pelangi. Pertimbangkan satu titik air yang berbentuk sfera. Sudut serakan (scattering angle), θ , yang terbentuk di antara laluan sinar monokromatik sebelum ia memasuki titik air dengan laluan sinar tersebut apabila ia keluar dari titik air diperihalkan oleh

$$\theta(r, i) = 4 \arcsin \left(\frac{\sin i}{r} \right) - 2i$$

di mana r ialah indeks pembiasan air bagi sinar di atas, dan i adalah sudut tuju bagi sinar tersebut.

...10/-

- (i) Kesan optik maksimum (warna-warna pelangi 'wujud') berlaku apabila

$$(*) \quad \partial \theta / \partial i = 0$$

Jika r diberi, tunjukkan bahawa sudut i_r yang memenuhi

(*) adalah

$$i_r = \arcsin \left(\frac{4 - r^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(30%)

- (ii) Bagi warna merah, $r = 1.330$ dan bagi warna ungu, $r = 1.342$.

Apakah sudut serakan bagi kedua-dua warna ini?

(20%)

- (iii) Dengan menulis

$$f(r) = \theta(r, i_r) = 4 \arcsin \left(\frac{\sin i_r}{r} \right) - 2i_r$$

di mana i_r adalah seperti di dalam (i), tunjukkan bahawa $f(r)$ adalah fungsi menyusut terhadap r .

[Petunjuk: Bezakan dan guna satu hubungan yang didapati di dalam (i), dan ingat bahawa i_r adalah sudut tirus]

(50%)

...11/-

6. (a) Pertimbangkan fungsi berikut:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -5 < t < 0 \\ t & 0 < t < 5 \end{cases} \quad \text{Kala} = 10$$

(i) Tentukan sama ada $f(t)$ ganjil atau genap.

(10%)

(ii) Cari rumus-rumus Euler bagi fungsi $f(t)$.

(40%)

(iii) Tuliskan siri Fourier yang sepadan.

(15%)

(iv) Bagaimanakah $f(t)$ harus ditakrif pada

$t = -5$, $t = 0$ dan $t = 5$ supaya siri Fourier
di atas menumpu kepada $f(t)$ bagi $-5 \leq x \leq 5$?

(15%)

(b) Persamaan pembezaan separa yang memerihalkan aliran haba di dalam satu rod nipis (konduktor) adalah

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

di mana $T(x, t)$ adalah suhu di titik x pada masa t , dan
 $c (> 0)$ adalah pemalar kemeresapan. Tunjukkan bahawa

$$T(x, t) = (1/\sqrt{t}) e^{-x^2/4ct}$$

memenuhi persamaan di atas.

(20%)

-ooo0ooo-